爆発時刻への収束性について

小澤 一文

1　はじめに

微分方程式

$$y'(t) = f(t,\, y), \qquad y(t^0) = y^0 \tag{1}$$

の解が $t = T$ で爆発するものと仮定する。この方程式の独立変数 t と従属変数 y を弧長 s の関数と考えると，$t(s)$ と $y(t(s))$（以下簡単に $y(s)$ で表す）は連立微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\begin{pmatrix} t \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+f^2}}\begin{pmatrix} 1 \\ f \end{pmatrix}, \quad t(0) = t^0, \quad y(0) = y^0 \tag{2}$$

を満たす。ここで，数列 $\{s_l\}$ を与え，この方程式を $s = 0$ から s_l まで積分したとき得られる t と y の値をそれぞれ t_l, y_l $(l = 0, 1, \ldots)$ で表し，すなわち

$$t(s_l) = t_l, \qquad y(s_l) = y_l$$

とし，$\{t_l\}$ の T への収束性を考察する。まず，以下の仮定を設ける：

1. 数列 $\{s_l\}_{l=0}^{\infty}$ は $0 < s_0$ を満たす単調増加列で
$$\lim_{l\to\infty} s_l = +\infty \tag{3}$$
となる。

2. $s_0 < s$ では常に $0 < y'(t(s))$ を満たしている。

この仮定より，数列 $\{y_l\}$ も単調増加列になり

$$\lim_{l\to\infty} y_l = +\infty \tag{4}$$

をとなる。

2　log-type の収束性について

$y(t) = -\log{(T-t)}$ の場合を考える。このとき，$\varepsilon_l \equiv T - t_l$ は

$$\varepsilon_l = T - t_l = \mathrm{e}^{-y_l} \tag{5}$$

と表されるので，式 (4) より $\lim_{l\to\infty} \varepsilon_l = 0$ は明らかである。t_l の T への収束速度を考える前に，まず $\xi_l \equiv y_l - s_l$ の収束性を考える。

補題 1 数列 $\{\xi_l\}$ は極限を持つ：

$$\lim_{l\to\infty} \xi_l = \xi$$

証明 $\mathrm{d}s/\mathrm{d}y = \sqrt{1+(y')^{-2}}$ より

$$\begin{aligned}
\xi_l = y_l - s_l = y_l - \int_{y^0}^{y_l} \sqrt{1+\mathrm{e}^{-2\,y}}\,\mathrm{d}y \\
&= y^0 + \int_{y^0}^{y_l} \left(1-\sqrt{1+\mathrm{e}^{-2\,y}}\right)\,\mathrm{d}y \\
&= y^0 - \int_{y^0}^{y_l} \frac{\mathrm{e}^{-2y}}{1+\sqrt{1+\mathrm{e}^{-2\,y}}}\,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

と表される。これより

$$\xi_l = y^0 - \int_{y^0}^{y_l} \frac{\mathrm{e}^{-2y}}{1+\sqrt{1+\mathrm{e}^{-2\,y}}}\,\mathrm{d}y > y^0 - \int_{y^0}^{y_l} \mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y > y^0 - \mathrm{e}^{-y^0}$$

となり，$\{\xi_l\}$ は下に有界な単調減少列となり収束する。 $\blacksquare$

定理 1 数列 $\{s_l\}$ が等差数列のとき，すなわち

$$\begin{aligned}
s_l = a + l\,\delta, \qquad l = 0,1,\ldots, \\
a > 0, \qquad \delta > 0
\end{aligned}$$

のとき，$\{t_l\}$ は T へ一次収束する。

証明 式 (5) より

$$\begin{aligned}
\lim_{l\to\infty} \frac{\varepsilon_{l+1}}{\varepsilon_l} &= \lim_{l\to\infty} \exp\left(-(s_{l+1}+\xi_{l+1}) + s_l + \xi_l\right) \\
&= \exp\left(-\delta + \lim_{l\to\infty}\left(-\xi_{l+1}+\xi_l\right)\right) \\
&= \mathrm{e}^{-\delta} < 1
\end{aligned}$$

を得る。よって定理は証明された。 $\blacksquare$

定理 2 数列 $\{s_l\}$ が等比数列のとき，すなわち

$$\begin{aligned}
s_l = a\,\gamma^l, \qquad l = 0,1,2,\ldots, \\
a > 0, \qquad \gamma > 1
\end{aligned}$$

のとき，t_l は T へ γ 次収束する。

証明 式 (5) より

$$\begin{aligned}
\lim_{l\to\infty} \frac{\varepsilon_{l+1}}{(\varepsilon_l)^\gamma} &= \lim_{l\to\infty} \exp\left(-(s_{l+1}+\xi_{l+1}) + \gamma\,(s_l+\xi_l)\right) \\
&= \exp\left(\lim_{l\to\infty}\left(-\xi_{l+1}+\gamma\,\xi_l\right)\right) \\
&= \exp\left((\gamma-1)\,\xi\right)
\end{aligned}$$

を得る。よって定理は証明された。 ∎

定理 3 数列 $\{s_l\}$ が log (等差数列) のとき，すなわち

$$s_l = \log(a + l\,\delta), \qquad l = 0, 1, \ldots,$$
$$a > 0, \qquad \delta > 0$$

のとき，$\{t_l\}$ は T へ対数収束する。すなわち，

$$\varepsilon_l = \mathrm{O}\left(\frac{1}{l}\right), \qquad l \to \infty$$

となる。

証明 補題 1 から得られる $\xi_l > \xi$ という結果を用いると

$$\begin{aligned}
\varepsilon_l &= \exp(-y_l) \\
&= \exp\ (-(s_l + \xi_l)) \\
&= \exp(-\xi_l)\ \exp(-\log(a + l\,\delta)) \\
&< \exp(-\xi)\,\frac{1}{a + l\,\delta}
\end{aligned}$$

を得る。 ∎

3 log log-type **の収束性について**

$y(t) = \log(-\log(T - t))$ となる場合を考える。このとき

$$\varepsilon_l = T - t_l = \exp(-\mathrm{e}^{y_l}) \tag{6}$$

となるので，この場合も式 (4) より t_l の T への収束性は明らかである。収束速度を考える前に y_l と s_l の差 $\xi_l = y_l - s_l$ を解析する。

補題 2 $\{\xi_l\}$ はある値 ξ に収束する：

$$\lim_{l\to\infty} \xi_l = \xi$$

証明 $\mathrm{d}s/\mathrm{d}y = \sqrt{1 + (y')^{-2}}$ より

$$\begin{aligned}
\xi_l = y_l - s_l = y_l - \int_{y^0}^{y_l} \sqrt{1 + (y')^{-2}}\,\mathrm{d}y \\
= y^0 + \int_{y^0}^{y_l} \left(1 - \sqrt{1 + \exp(2\,y - 2\,\mathrm{e}^y)}\right) \mathrm{d}y \qquad (7) \\
= y^0 - \int_{y^0}^{y_l} \frac{\exp(2\,y - 2\,\mathrm{e}^y)}{1 + \sqrt{1 + \exp(2\,y - 2\,\mathrm{e}^y)}}\,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

を得る。これより

$$
\begin{aligned}
\xi_l &= y^0 - \int_{y^0}^{y_l} \frac{\exp(2\,y - 2\,\mathrm{e}^y)}{1 + \sqrt{1 + \exp(2\,y - 2\,\mathrm{e}^y)}}\,\mathrm{d}y \\
&> y^0 - \int_{y^0}^{y_l} \exp(y - \mathrm{e}^y)\,\mathrm{d}y \\
&> y^0 - \exp\left(-\mathrm{e}^{y^0}\right)
\end{aligned}
$$

となり，$\{\xi_l\}$ は下に有界な単調減少列となり収束する。 ∎

補題 3 $\{\xi_l\}$ に関して次の結果が得られる：

$$
\lim_{l\to\infty} l\,(\mathrm{e}^{\xi_{l+1}} - \mathrm{e}^{\xi_l}) = 0.
$$

証明 まず $l\,(\xi_{l+1} - \xi_l)$ について考察する。式 (7) より

$$
\begin{aligned}
l\,|\,\xi_{l+1} - \xi_l\,| &= l \int_{y_l}^{y_{l+1}} \frac{\exp(2\,y - 2\,\mathrm{e}^y)}{1 + \sqrt{1 + \exp(2\,y - 2\,\mathrm{e}^y)}}\,\mathrm{d}y \\
&< l\,\Big|\exp(y_l - \mathrm{e}^{y_l}) - \exp(y_{l+1} - \mathrm{e}^{y_{l+1}})\Big|
\end{aligned}
$$

が得られる。ここで，十分大きな l に対しては $l < \mathrm{e}^{y_l}$ となるので，そのような l に対して，上式より

$$
\begin{aligned}
l\,|\,\xi_{l+1} - \xi_l\,| &< l\,\Big|\exp(y_l - \mathrm{e}^{y_l}) - \exp(y_{l+1} - \mathrm{e}^{y_{l+1}})\Big| \\
&< \Big|\exp(2\,y_l - \mathrm{e}^{y_l}) - \exp(y_l + y_{l+1} - \mathrm{e}^{y_{l+1}})\Big| \to 0, \quad l \to \infty
\end{aligned}
$$

を得る。よって

$$
\begin{aligned}
\lim_{l\to\infty} l\,(\mathrm{e}^{\xi_{l+1}} - \mathrm{e}^{\xi_l}) &= \lim_{l\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{\xi_{l+1}} - \mathrm{e}^{\xi_l}}{\xi_{l+1} - \xi_l}\ \lim_{l\to\infty} l\,(\xi_{l+1} - \xi_l) \\
&= \mathrm{e}^{\xi} \lim_{l\to\infty} l\,(\xi_{l+1} - \xi_l) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

が得られる。 ∎

定理 4 数列 $\{s_l\}$ が $\log$ (等差数列) のとき，すなわち s_l を

$$
s_l = \log(a + l\,\delta), \qquad l = 0, 1, 2, \ldots,
$$

$$
a > 0, \qquad \delta > 0
$$

のように選んだとき，$\{t_l\}$ は T に一次収束する。

証明 式 (6) より

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_l = T - t_l &= \exp(-\mathrm{e}^{y_l}) \\
&= \exp\left(-(a + l\,\delta)\,\mathrm{e}^{\xi_l}\right)
\end{aligned}
$$

を得る。よって補題 2, 3 より

$$\begin{aligned}\lim_{l\to\infty}\frac{\varepsilon_{l+1}}{\varepsilon_l} &= \lim_{l\to\infty}\exp\left\{(a+l\,\delta)\,\mathrm{e}^{\xi_l}-(a+(l+1)\,\delta)\,\mathrm{e}^{\xi_{l+1}}\right\}\\ &= \exp\left\{\lim_{l\to\infty}\left(a\,(\mathrm{e}^{\xi_l}-\mathrm{e}^{\xi_{l+1}})+l\,\delta\,(\mathrm{e}^{\xi_l}-\mathrm{e}^{\xi_{l+1}})-\delta\,\mathrm{e}^{\xi_{l+1}}\right)\right\} \qquad (8)\\ &= \exp\left(-\delta\,\mathrm{e}^{\xi}\right)\end{aligned}$$

を得る。 ∎

次に，$\{s_l\}$ が等差数列のとき，すなわち s_l を

$$s_l = a + l\,\delta, \qquad l = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$a > 0, \qquad \delta > 0$$

とした場合を考える。このとき次の補題が得られる。

補題 4　次の結果が得られる：

$$\lim_{l\to\infty}(\xi_{l+1}-\xi_l)\,\mathrm{e}^{l\,\delta} = 0$$

証明 式 (7) より

$$\begin{aligned}|\,\xi_{l+1}-\xi_l\,|\,\mathrm{e}^{l\,\delta} &= \mathrm{e}^{l\,\delta}\int_{y_l}^{y_{l+1}}\frac{\exp(2\,y-2\,\mathrm{e}^{y})}{1+\sqrt{1+\exp(2\,y-2\,\mathrm{e}^{y})}}\,\mathrm{d}y\\ &< \left|\exp(l\,\delta+y_l-\mathrm{e}^{y_l})-\exp(l\,\delta+y_{l+1}-\mathrm{e}^{y_{l+1}})\right| \to 0, \qquad l\to\infty\end{aligned}$$

が得られる。 ∎

定理 5　数列 $\{s_l\}$ が等差数列のとき，$\{t_l\}$ は T へ $\gamma\,(=\mathrm{e}^{\delta})$ 次収束する。

証明 ε_l は

$$\varepsilon_l = \exp\left(-\mathrm{e}^{s_l+\xi_l}\right) = \exp\left(-\mathrm{e}^{a}\cdot\mathrm{e}^{l\,\delta}\cdot\mathrm{e}^{\xi_l}\right)$$

となる。よって，$\gamma = \mathrm{e}^{\delta}$ に対して

$$\begin{aligned}\lim_{l\to\infty}\frac{\varepsilon_{l+1}}{(\varepsilon_l)^{\gamma}} &= \lim_{l\to\infty}\frac{\exp\left(-\mathrm{e}^{a}\cdot\mathrm{e}^{(l+1)\,\delta}\cdot\mathrm{e}^{\xi_{l+1}}\right)}{\exp\left(-\mathrm{e}^{a}\cdot\mathrm{e}^{(l+1)\,\delta}\cdot\mathrm{e}^{\xi_l}\right)}\\ &= \lim_{l\to\infty}\exp\left(-\mathrm{e}^{a}\cdot\mathrm{e}^{(l+1)\,\delta}\cdot(\mathrm{e}^{\xi_{l+1}}-\mathrm{e}^{\xi_l})\right)\\ &= \exp\left\{-\mathrm{e}^{a+\delta}\cdot\lim_{l\to\infty}\left(\mathrm{e}^{l\,\delta}\cdot(\mathrm{e}^{\xi_{l+1}}-\mathrm{e}^{\xi_l})\right)\right\}\end{aligned}$$

が得られる。ここで，補題 4 より

$$\begin{aligned}\lim_{l\to\infty}\left(e^{l\,\delta}\cdot(\mathrm{e}^{\xi_{l+1}}-\mathrm{e}^{\xi_l})\right) &= \lim_{l\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{\xi_{l+1}}-\mathrm{e}^{\xi_l}}{\xi_{l+1}-\xi_l}\,\lim_{l\to\infty}(\xi_{l+1}-\xi_l)\,\mathrm{e}^{l\,\delta}\\ &= \mathrm{e}^{\xi}\,\lim_{l\to\infty}(\xi_{l+1}-\xi_l)\,\mathrm{e}^{l\,\delta}\\ &= 0\end{aligned}$$

となるので

$$\lim_{l\to\infty}\frac{\varepsilon_{l+1}}{(\varepsilon_l)^\gamma}=1$$

が得られる。よって定理は証明された。 ∎

以上の結果をまとめると次表のようになる。

$y(t)$	s_l			
	log (等差数列)	等差数列	等比数列	二重指数型数列
$\frac{1}{T-t}$		対数収束	一次収束	γ 次収束
$\log\frac{1}{T-t}$	対数収束	一次収束	γ 次収束	
$\log\log\frac{1}{T-t}$	一次収束	γ 次収束		

二重指数型数列：$s_l=a^{\gamma^l}$

例 1 微分方程式

$$y'=\exp(y),\qquad y(0)=0$$

を考える。解は

$$y(t)=-\log(1-t) \tag{9}$$

であるから，$t=1$ が爆発時刻になる。

(1) $s_l=8+l$ の場合

l	$\varepsilon_l\,(\log\lvert\varepsilon_l\rvert)$
0	4.205e-04 (-7.774e+00)
1	1.547e-04 (-8.774e+00)
2	5.691e-05 (-9.774e+00)
3	2.094e-05 (-1.077e+01)
4	7.702e-06 (-1.177e+01)
5	2.833e-06 (-1.277e+01)
6	1.042e-06 (-1.377e+01)
7	3.835e-07 (-1.477e+01)
8	1.411e-07 (-1.577e+01)
9	5.190e-08 (-1.677e+01)
10	1.909e-08 (-1.777e+01)
11	7.023e-09 (-1.877e+01)
12	2.584e-09 (-1.977e+01)

(2) $s_l = 2 \cdot 2^l$ の場合

l	$\varepsilon_l\,(\log\lvert\varepsilon_l\rvert)$
0	1.685e-01 (-1.781e+00)
1	2.296e-02 (-3.774e+00)
2	4.205e-04 (-7.774e+00)
3	1.411e-07 (-1.577e+01)
4	1.465e-14 (-3.185e+01)
5	-1.332e-15 (-3.425e+01)
6	-1.332e-15 (-3.425e+01)

例 2 微分方程式

$$y'(t) = \frac{\exp\left(-y(t)\right)}{1-t}, \qquad y\left(1-\mathrm{e}^{-1}\right) = 0 \tag{10}$$

を考える。この方程式の解は

$$y(t) = \log\,\left(-\log\left(1-t\right)\right)$$

であるから，$t = 1$ が爆発時刻になる。

(1) $s_l = \log\left(10+l\right)$ の場合

l	$\varepsilon_l\,(\log\lvert\varepsilon_l\rvert)$
0	7.362e-05 (-9.52e+00)
1	2.842e-05 (-1.05e+01)
2	1.097e-05 (-1.14e+01)
3	4.237e-06 (-1.24e+01)
4	1.636e-06 (-1.33e+01)
5	6.317e-07 (-1.43e+01)
6	2.439e-07 (-1.52e+01)
7	9.420e-08 (-1.62e+01)
8	3.639e-08 (-1.71e+01)
9	1.407e-08 (-1.81e+01)
10	5.442e-09 (-1.90e+01)
11	2.100e-09 (-2.00e+01)
12	8.123e-10 (-2.09e+01)
13	3.130e-10 (-2.19e+01)
14	1.209e-10 (-2.28e+01)
15	4.666e-11 (-2.38e+01)

(2) $s_l = \log(2 \cdot 2^l)$ の場合

l	$\varepsilon_l\,(\log\lvert\varepsilon_l\rvert)$
0	1.455e-01 (-1.93e+00)
1	2.218e-02 (-3.81e+00)
2	4.938e-04 (-7.61e+00)
3	2.439e-07 (-1.52e+01)
4	5.973e-14 (-3.04e+01)
5	4.441e-16 (-3.54e+01)