変数分離法による熱伝導方程式および波動方程式の解

ごく小数の例外を除いて，熱伝導方程式も波動方程式も解を解析的に表現することはできない。ここではその例外を学ぶ。

1　熱伝導方程式

両端を $0^\circ\mathrm{C}$ にした長さ L の棒の熱拡散は次式で表される：

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} = \lambda\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < L, \qquad 0 < t, \qquad 0 < \lambda \\
&u(x,0) = f(x), \\
&u(0,t) = u(L,t) = 0.
\end{aligned} \tag{1}$$

この方程式の解 $u(x,t)$ を x だけの関数 $X(x)$ と t だけの関数 $T(t)$ を用いて

$$u(x,t) = X(x)\,T(t) \tag{2}$$

と置いてみる。これを式 (1) に代入し，式を整理すると

$$\frac{T'}{\lambda T} = \frac{X''}{X}$$

が得られる。この式において，左辺は t だけの関数で，右辺は x だけの関数であるから，この値は定数になるはずである。それを μ と置く。すなわち

$$\frac{T'}{\lambda T} = \frac{X''}{X} = \mu \tag{3}$$

とする。

まず，式 (3) を X について解くと，それぞれの場合について次のような一般解を持つ：

- $\mu > 0$ のとき

$$X(x) = c_1\,\exp\left(-\sqrt{\mu}\,x\right) + c_2\,\exp\left(\sqrt{\mu}\,x\right)$$

- $\mu = 0$ のとき

$$X(x) = c_1\,x + c_0$$

- $\mu < 0$ のとき

$$X(x) = c_1\,\cos\left(\sqrt{-\mu}\,x\right) + c_2\,\sin\left(\sqrt{-\mu}\,x\right) \tag{4}$$

これら三つの条件のうち，最初の二つに関しては，境界条件にあう解を選び出すと $X(x) = 0$ のみとなり，自明な解しか存在しないことがわかる。そこで三番目の条件だけを考える。この場合，境界条件より

$$c_1 = 0, \qquad c_2\,\sin\left(\sqrt{-\mu}\,L\right) = 0$$

であり，これより，$c_2 = 0$ の場合を除くと

$$\sqrt{-\mu}\,L = m\,\pi, \qquad m = 1, 2, \ldots$$

となる。したがって，境界条件に合う式 (4) の一般解は

$$X(x) = c_2\,\sin\left(\frac{m\,\pi}{L}\,x\right)$$

である。

一方，$T(t)$ の方程式は

$$T' - \lambda\,\mu\,T = 0$$

であるから，一般解は

$$T(t) = d\,\exp\left(\lambda\,\mu\,t\right)$$

となる。

これより $u(x,t)$ の一般解は，重ね合わせの原理より

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m\,\exp\left(-\frac{\lambda\,m^2\,\pi^2}{L^2}\,t\right)\,\sin\left(\frac{m\,\pi}{L}\,x\right) \tag{5}$$

となる。この式において，初期条件 $u(x,0) = f(x)$ より

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m\,\sin\left(\frac{m\,\pi}{L}\,x\right)$$

となる。したがって，a_m は

$$a_m = 2\int_0^L \sin\left(\frac{m\,\pi}{L}\,x\right)\,f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad m = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

として求まる。

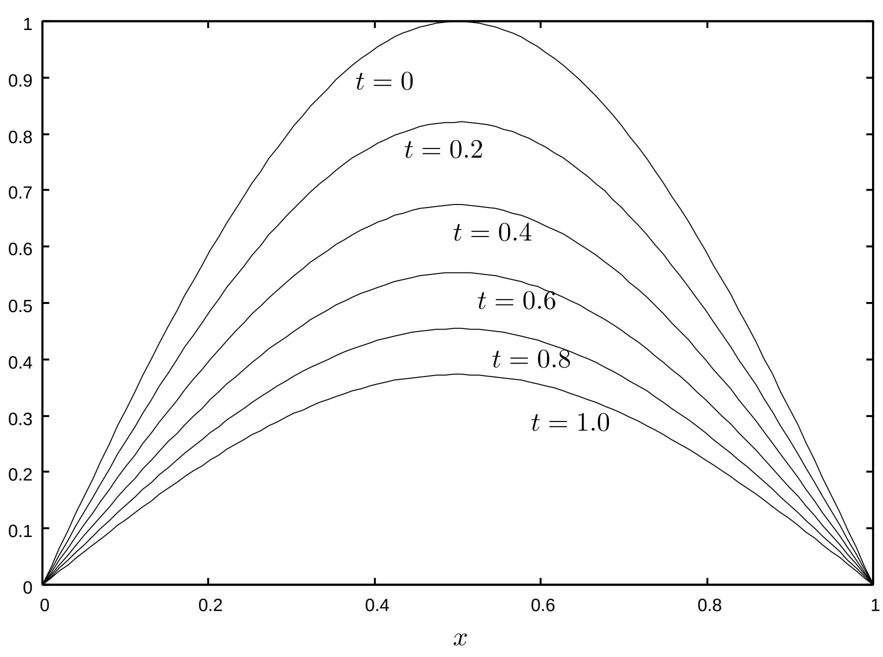
例 $L = 1$ として $f(x) = \sin\pi x$ とすると，式 (6) より

$$a_m = \begin{cases} 1, & m = 1, \\ 0, & m > 1 \end{cases}$$

となるから，式 (5) より

$$u(x,t) = \exp\left(-\lambda\,\pi^2\,t\right)\,\sin\pi x$$

となる。



$\lambda = 0.1$ のときの $u(x,t)$ の変化

2　波動方程式の解

両端を固定した長さ L の弦の振動は次式で表される：

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < L, \qquad 0 < t, \\
&u(x,0) = f(x), \qquad u_t(x,0) = g(x), \\
&u(0,t) = u(L,t) = 0.
\end{aligned} \tag{7}
$$

この方程式の解 $u(x,t)$ を x だけの関数 $X(x)$ と t だけの関数 $T(t)$ を用いて

$$
u(x,t) = X(x)\,T(t) \tag{8}
$$

と置いてみる。これを式 (7) に代入し式を整理すると

$$
\frac{T''}{T} = c^2\,\frac{X''}{X}
$$

が得られる。この式において，左辺は t だけの関数で，右辺は x だけの関数であるから，この値は定数になるはずである。それを k と置く。すなわち

$$
\frac{T''}{T} = c^2\,\frac{X''}{X} = k \tag{9}
$$

とする。

まず，式 (9) を T について解くと，それぞれの場合について次のような一般解を持つ：

- $k > 0$ のとき

$$
T(t) = c_1\,\exp\left(\sqrt{k}\,t\right) + c_2\,\exp\left(-\sqrt{k}\,t\right)
$$

- $k = 0$ のとき

$$
T(t) = c_1\,t + c_2
$$

- $k < 0$ のとき

$$
T(t) = c_1\,\cos\left(\sqrt{-k}\,t\right) + c_2\,\sin\left(\sqrt{-k}\,t\right)
$$

上の 3 つのうちで物理的に自然な解は三番目のみである。そこで $k < 0$ として $k = -\alpha^2$ と置く。このとき

$$
T(t) = c_1\,\cos(\alpha\,t) + c_2\,\sin(\alpha\,t)
$$

であり，

$$
X'' = -\frac{\alpha^2}{c^2}\,X \tag{10}
$$

となる。

一方，式 (10) の一般解は

$$
X(x) = d_1\,\cos\left(\frac{\alpha}{c}\,x\right) + d_2\,\sin\left(\frac{\alpha}{c}\,x\right) \tag{11}
$$

である。境界条件より $X(0) = X(L) = 0$ となるから

$$
d_1 = 0, \qquad d_2 \sin\left(\frac{\alpha}{c}\,L\right) = 0
$$

を得る。これより

$$\frac{\alpha}{c}\,L = m\,\pi, \qquad m = 1, 2, \ldots$$

である。要するに $X(x)$ は

$$X(x) = B_m\,\sin\left(\frac{m\,\pi}{L}\,x\right), \qquad m = 1, 2, \ldots$$

という形の解を持つ。ここで B_m は定数である。したがって，重ね合わせの原理より

$$X(x) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m\,\sin\left(\frac{m\,\pi}{L}\,x\right)$$

が $X(x)$ の一般解である。以上より $u(x,t)$ は

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\left(\alpha_m\,\cos\left(\frac{m\,c\,\pi}{L}\,t\right) + \beta_m\,\sin\left(\frac{m\,c\,\pi}{L}\,t\right)\right)\sin\left(\frac{m\,\pi}{L}\,x\right) \tag{12}$$

という形式の一般解を持つ。この解は，三角関数の “積を和に変換する公式” を用いて

$$u(x,t) = \varphi(x - c\,t) + \psi(x + c\,t)$$

という形に表現できる。

次に，初期条件より未知定数 α_m, β_m を決める。まず，$u(x,0) = f(x)$ より

$$\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m\,\sin\left(\frac{m\,\pi}{L}\,x\right) = f(x)$$

であるから，α_m は $f(x)$ のフーリエ正弦展開の係数であり

$$\alpha_m = \frac{2}{L}\int_0^L \sin\left(\frac{m\,\pi}{L}\,x\right) f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad m = 1, 2, \ldots \tag{13}$$

として求められる。一方，$u_t(x,0) = g(x)$ より

$$\beta_m = \frac{2}{m\,c\,\pi\,L}\int_0^L \sin\left(\frac{m\,\pi}{L}\,x\right) g(x)\,\mathrm{d}x, \qquad m = 1, 2, \ldots \tag{14}$$

を得る。

例 1. $L = 1$ かつ $f(x) = \sin(\pi\,x)$, $g(x) = 0$ のとき，式 (13), (14) より

$$\alpha_m = \begin{cases} 1, & m = 1, \\ 0, & m > 1, \end{cases}$$
$$\beta_m = 0, \qquad m = 1, 2, \ldots$$

であるから

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \cos(c\,\pi\,t)\,\sin(\pi\,x) \\ &= \frac{1}{2}\left\{\sin(\pi\,(x - c\,t)) + \sin(\pi\,(x + c\,t))\right\} \end{aligned}$$

を得る。

例 2. $L = c = 1$, $g(x) = 0$ かつ

$$f(x) = x\,(1 - x), \qquad 0 \le x \le 1$$

のとき

$$\alpha_m = \frac{4}{m^3\,\pi^3}\,(1-\cos\,(m\,\pi)), \qquad m = 1, 2, \ldots$$

であるから，

$$u(x,t) = \frac{8}{\pi^3}\left(\cos\,(\pi\,t)\,\sin(\pi\,x) + \frac{1}{27}\cos\,(3\,\pi\,t)\,\sin\,(3\,\pi\,x) + \frac{1}{125}\cos\,(5\,\pi\,t)\,\sin\,(5\,\pi\,x) + \cdots\right)$$

となる。

ストークスの公式による波動方程式の解

一次元波動方程式

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ &u(x,0) = f(x), \qquad u_t(x,\,0) = g(x) \end{aligned} \tag{15}$$

の解は

$$u(x,\,t) = \frac{1}{2}\big(f(x-c\,t) + f(x+c\,t)\big) + \frac{1}{2c}\int_{x-c\,t}^{x+c\,t} g(s)\,\mathrm{d}s \tag{16}$$

という形で与えられる (ストークスの公式)。以下これを導びく。

方程式 (15) は

$$u(x,t) = \varphi(x-c\,t) + \psi(x+c\,t) \tag{17}$$

という形の一般解を持つ (ダランベールの解)。ここで $\varphi,\,\psi$ を初期条件に合うように決める。初期条件より

$$u(x,0) = \varphi(x) + \psi(x) = f(x), \tag{18}$$

$$u_t(x,0) = c\,(-\varphi'(x) + \psi'(x)) = g(x) \tag{19}$$

となる。次に，式 (18) を x で微分して

$$\varphi'(x) + \psi'(x) = f'(x)$$

を得るから，この式と式 (19) より

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \frac{1}{2}\big(f'(x) - \frac{1}{c}\,g(x)\big) \\ \psi'(x) &= \frac{1}{2}\big(f'(x) + \frac{1}{c}\,g(x)\big) \end{aligned} \tag{20}$$

を得る。この式を積分すると

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{2}\left(f(x) - \frac{1}{c}\int_0^x g(s)\,\mathrm{d}s\right) + a \\ \psi(x) &= \frac{1}{2}\left(f(x) + \frac{1}{c}\int_0^x g(s)\,\mathrm{d}s\right) + b \end{aligned} \tag{21}$$

を得る。ここで $a,\,b$ は任意定数であり，したがって，式 (18) より

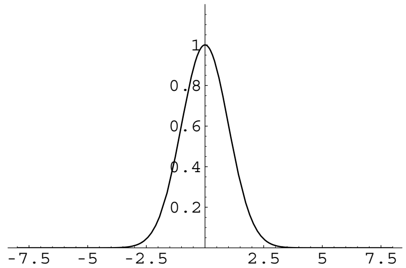
$$a + b = 0$$

を満たすことがわかる。以上より

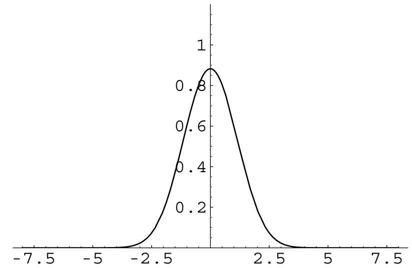
$$\begin{aligned} u(x,\,t) &= \varphi(x-c\,t) + \psi(x+c\,t) \\ &= \frac{1}{2}\left(f(x-c\,t) + f(x+c\,t)\right) + \frac{1}{2c}\int_0^{x+c\,t} g(s)\mathrm{d}s - \frac{1}{2c}\int_0^{x-c\,t} g(s)\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{2}\left(f(x-c\,t) + f(x+c\,t)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-c\,t}^{x+c\,t} g(s)\mathrm{d}s \end{aligned}$$

となり式 (16) を得る。

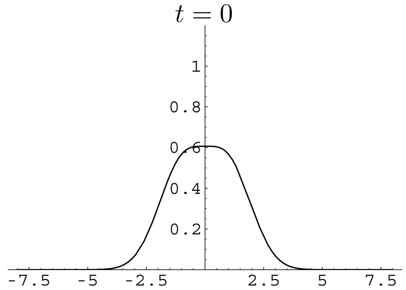
ここで $c = 1,\ f(x) = \exp(-x^2/2),\ g(x) = 0$ とした場合の解 $u(x,t)$ の変化の様子を図示する。



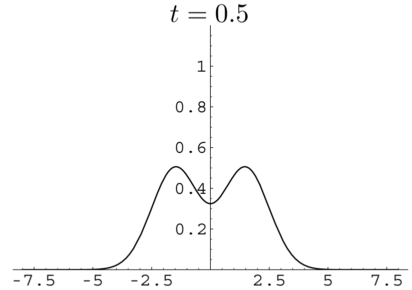
$t = 0$



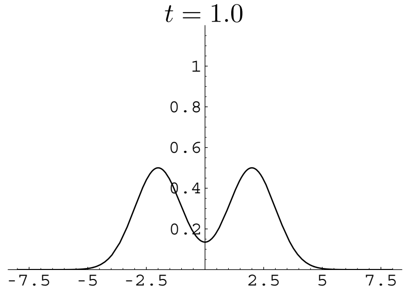
$t = 0.5$



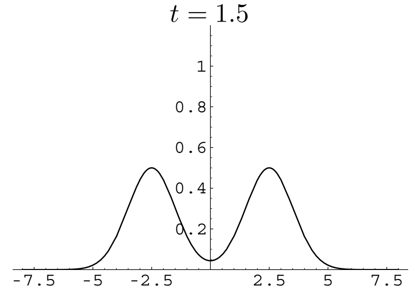
$t = 1.0$



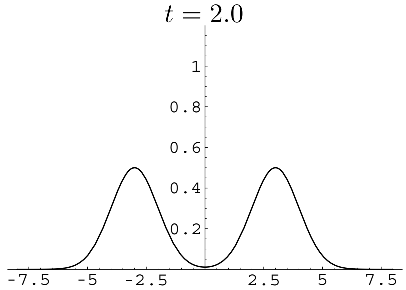
$t = 1.5$



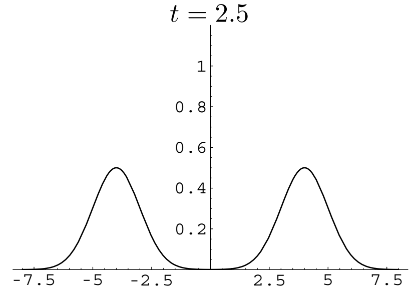
$t = 2.0$



$t = 2.5$



$t = 3.0$



$t = 4.0$

問 波動方程式 (15) がダランベールの解 (17) を持つことを証明せよ。

`http://www.pna.eis.akita-pu.ac.jp/~ozawa/Lecture/Grad_Schl/HandOut04.pdf`