# 微分の差分近似

## 1　3 点差分による導関数の二次近似

等間隔に並んだ 3 点 $x_n, x_{n+1}, x_{n+2}$ における $u(x)$ の値を用いて $u'(x_n)$ に対する近似度 2 の差分を求める。ここで各点の間隔を $\Delta x$ とし，$u(x_n)$ を $u_n$，$u'(x_n)$ を $u'_n$，$u''(x_n)$ を $u''_n$ のように表す。

$x = x_n$ の回りで $u(x_{n+1}), u(x_{n+2})$ を Taylor 展開すると

$$
\begin{aligned}
a\,u_n + b\,u_{n+1} + c\,u_{n+2} = {} & (a+b+c)\,u_n + (b+2\,c)\,\Delta x\,u'_n \\
& + \frac{1}{2}\,(b+4\,c)\,\Delta x^2 u''_n + \frac{1}{3!}\,(b+8\,c)\,\Delta x^3\,u_n^{(3)} + \cdots
\end{aligned}
\tag{1}
$$

となる。ここで

$$
a+b+c=0, \qquad b+4\,c=0
$$

と置くと

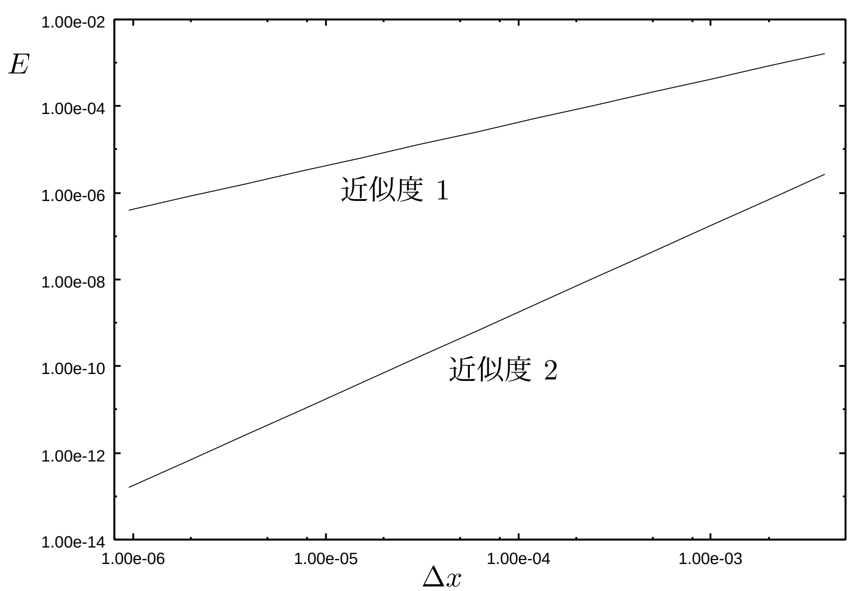
$$
c = \frac{1}{3}\,a, \qquad b = -\frac{4}{3}\,a
$$

となる。これらを式 (1) に代入し

$$
\frac{-3\,u_n + 4\,u_{n+1} - u_{n+2}}{2\,\Delta x} = u'_n - \frac{1}{3}\,\Delta x^2\,u_n^{(3)} + O(\Delta x^3)
\tag{2}
$$

を得る。よって左辺は $u'(x_n)$ に対する近似度 2 の差分になっている。

下に近似度 1 の差分 $(u_{n+1} - u_n)/\Delta x$ と上で導いた近似度 2 の差分の誤差を比較する。




近似度 1 の差分と近似度 2 の差分との誤差の比較

## 2　5点差分による2階の導関数の近似

次に 5 点での値 $u_{n+2}, u_{n+1}, u_n, u_{n-1}, u_{n-2}$ を用いて近似度 4 の $u''(x_n)$ に対する差分近似を求める。まず

$$a\,u_{n+2} + b\,u_{n+1} + c\,u_n + b\,u_{n-1} + a\,u_{n-2}$$

なる量を考える。ここで前と同様に $u_n = u(x)$, $u_{n\pm1} = u(x \pm \Delta x)$, $u_{n\pm2} = u(x \pm 2\,\Delta x)$ と置くと，Taylor 展開より

$$\begin{aligned} &a\,u_{n+2} + b\,u_{n+1} + c\,u_n + b\,u_{n-1} + a\,u_{n-2} \\ &\qquad = (2a + 2b + c)\,u_n + \frac{1}{2}\,\Delta x^2\,(8\,a + 2\,b)\,u_n'' \\ &\qquad + \frac{1}{4!}\,\Delta x^4\,(32\,a + 2\,b)\,u_n^{(4)} + \frac{1}{6!}\,\Delta x^6\,(2 \cdot 2^6 a + 2b)\,u_n^{(6)} + \cdots \end{aligned} \tag{3}$$

を得る。ここで $u_n$ と $u_n^{(4)}$ の係数を 0 と置く:

$$\begin{cases} 2a + 2b + c = 0 \\ \quad 32a + 2b = 0 \end{cases}$$

これより

$$a = \frac{1}{30}\,c, \qquad b = -\frac{16}{30}\,c \tag{4}$$

を得る。これらを代入すると式 (3) の左辺は

$$\begin{aligned} &a\,u_{n+2} + b\,u_{n+1} + c\,u_n + b\,u_{n-1} + a\,u_{n-2} \\ &\qquad = \frac{c}{30}\,(u_{n+2} - 16\,u_{n+1} + 30\,u_n - 16\,u_{n-1} + u_{n-2}) \end{aligned} \tag{5}$$

となる。一方，右辺は

$$\frac{1}{2}\Delta x^2 (8a + 2b)\,u_n'' + \frac{2}{6!}\,(64a + b)\,\Delta x^6\,u_n^{(6)} + \cdots = \frac{c}{30}\left(-12\Delta x^2 u_n'' + \frac{2}{15}\,\Delta x^6 u_n^{(6)} + \cdots\right) \tag{6}$$

となる。以上より

$$\frac{-u_{n+2} + 16\,u_{n+1} - 30\,u_n + 16\,u_{n-1} - u_{n-2}}{12\,\Delta x^2} = u_n'' - \frac{1}{90}\,\Delta x^4\,u_n^{(6)} + \cdots \tag{7}$$

という $u''(x)$ の 4 次の差分近似が得られる。

**問** $u_{n-1}, u_{n+1}$ を用いて $u_n'$ に対する近似度 2 の差分を求めよ。

**問** $u_{n-1}$, $u_n$, $u_{n+1}$ を用いて $u_n''$ に対する近似度 2 の差分を求めよ。

**Taylor 展開**

$u(x)$ が十分滑らかなとき

$$u(x + \Delta x) = u(x) + \Delta x\,u'(x) + \frac{\Delta x^2}{2!}\,u''(x) + \frac{\Delta x^3}{3!}\,u^{(3)}(x) + \frac{\Delta x^4}{4!}\,u^{(4)}(x) + \cdots$$

と展開できる。

http://www.pna.eis.akita-pu.ac.jp/~ozawa/Lecture/Grad_Schl/HandOut03.pdf